

Lycée Pilote Gafsa	Devoir de synthèse N°3	2S <sub>3+5-6</sub>
Le 28/05/2005		Durée 2h
Profs : H.Lamine & A.Kfinissi		

Exercice N°1 : (5 points)

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère le cercle  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 + y^2 = 4$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $x = \frac{5}{2}$ .

Soit M un point de  $\Delta$  d'ordonnée  $\lambda$  et (MT) une tangente au cercle  $\mathcal{C}$  ( $T \in \mathcal{C}$ ).

- 1) Déterminer le rayon et le centre de  $\mathcal{C}$ .
- 2) Calculer MO et MT en fonction de  $\lambda$ .
- 3) Ecrire l'équation du cercle  $\Gamma$  de centre M et de rayon MT.
- 4) Montrer que le cercle  $\Gamma$  coupe la droite des abscisses en deux points fixes lorsque le point M décrit  $\Delta$ .

Exercice N°2 : (2 points)

Déterminer cinq entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des trois autres.

Exercice N°3 : (2 points)

- 1) Montrer que la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs " $(n+1)$  et  $n$ " est un nombre impair.
- 2) Dédire la somme  $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 199$ .

Exercice N°4 : (2 points)

ABC un triangle rectangle en A, à côtés entiers. On pose  $BC = a$ ,  $AC = b$  et  $AB = c$ . Montrer qu'au moins un des trois entiers a, b et c divise 3.

Exercice N°5 : (9 points)

On donne la figure suivante où [AH] est la hauteur issue de A  
[BI] la médiane issue de B

[CJ] la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{ACB}$   
K le projeté orthogonal de I = A\*C sur (BC).

On pose  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $\widehat{ACB} = \alpha$ ,  $\widehat{CBA} = \beta$  et  $\widehat{BAC} = \delta$ .

- 1) a) Montrer que (IK) est parallèle à (AH).

b) Dédire que  $K = H * C$ .

- 2) Montrer que  $\frac{CI}{CB} = \frac{OI}{OB} = \frac{b}{2a}$ .

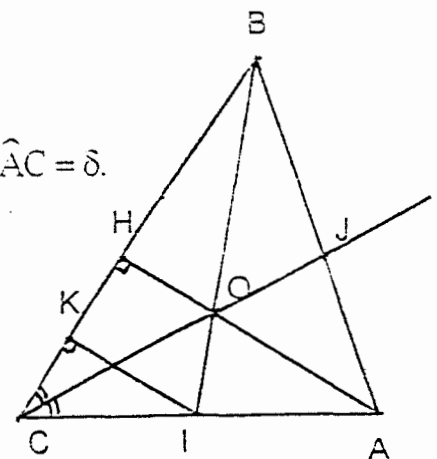
- 3) Montrer que  $\frac{OI}{OB} = \frac{HK}{HB}$ . Dédire que  $\frac{OI}{OB} = \frac{1}{2} \frac{CH}{a - CH}$ .

- 4) a) Exprimer CH à l'aide de b et  $\cos \alpha$ . puis déduire que  $a \cdot \cos \alpha = a - b \cdot \cos \alpha$ .

b) Dédire alors que  $\cos \alpha = \frac{a}{a + b}$ .

- 5) a) Vérifier que  $BH = a - b \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \alpha$ .

b) Dédire que  $c \cdot \cos \beta = a \cdot \cos \alpha$ .



- 6) a) Exprimer  $c$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\cos\alpha$   
b) Montrer que  $(a^2 + b^2 - c^2)(a - b) = 2a^2b$ .
- 7) a) Déterminer une relation entre  $\sin\alpha$ ,  $\sin\beta$  et  $\sin\delta$ .  
b) Montrer que  $\cos\alpha = \frac{\sin\delta}{\sin\delta - \sin\beta}$ .